$\mathbb{C}$ est algébriquement clos, preuve par réduction.

Leçon : 125, 144, 149, 154

Rq : Carmet voyage algèbre.

On prouve que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos via la réduction. On commence par montrer un lemme.

Lemme 1

Soit u, v deux endomorphismes d'un ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ sur un corps $\mathbb{K}$. On suppose que u et v commutent et que leurs polynômes minimaux sont scindés sur $\mathbb{K}$.

Si $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et $Sp(v) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, alors on peut les ordonner de sorte que $\forall \alpha \in \mathbb{K}$,

$$Sp(\lambda_1 + \mu_1 + \alpha\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n + \mu_n + \alpha\lambda_n\mu_n) = Sp(u + v + \alpha(u \circ v))$$

Preuve $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

u et v commutent
π_u et π_v scindés
} u et v sont cotrigonalisables.

Il existe une base $\mathcal{B}$ de E t.q. la décomp. de la matrice triangulaire $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ (resp. $Mat_{\mathcal{B}}(v)$) selon $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ (resp. $(\mu_1, \dots, \mu_n)$).

Alors, $diagonale\left(Mat_{\mathcal{B}}(u + v + \alpha(u \circ v))\right) = (\lambda_i + \mu_i + \alpha\mu_i\nu_i)_{1 \le i \le n}$.

□

Preuve ($\mathbb{C}$ algébriquement clos)

On note $v_2(m)$ la valuation 2-adique d'un entier $m \in \mathbb{N}^*$.

On veut montrer par récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$,

H_m : "Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est de degré m avec $v_2(m) = m$, alors P possède une racine dans $\mathbb{C}$".

Initialisation Si $m = 0$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $m \in \mathbb{N}^*$ avec $v_2(m) = 0$, donc impair. Alors,

- $\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$
- $x \mapsto P(x) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$

Par le TVI, il existe $c \in \mathbb{R}$ (CC) tq $P(c) = 0$.

Hérédité Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose que H_m est vraie.
Montrons H_{m+1}. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, degré $P = m$ avec $v_2(m) = m+1$.
On note C_P la matrice compagnon de P.

On note $U : \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et $X \mapsto C_P X$ | $V : \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ $X \mapsto X C_P^T$.

On voit que : $\to U$ et V commutent
$\overset{(*)}{\Rightarrow} U+V$ et UV stabilisent $S_m(\mathbb{R})$.

(*) Soit $\Pi \in S_m(\mathbb{R})$. • $[(U+V)(\Pi)]^T = [C_P \Pi + \Pi C_P^T]^T = \Pi C_P^T + \Pi C_P = (U+V)(\Pi)$.
• $[(U \circ V)(\Pi)]^T = [C_P \Pi C_P^T]^T = C_P \Pi C_P^T = (U \circ V)(\Pi)$.

Soit $\mathbb{K}$ le corps de décomposition de P. On note $(\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in \mathbb{K}^m$ les racines de P.
On a $\chi(C_P) = \chi(C_P^T) = P$, scindé sur $\mathbb{K}$.
↑ polynôme caractéristique

On a aussi $\pi_U = \pi_{C_P} = P$

(on vérifie que $\forall Q \in \mathbb{C}[X]$, $\forall A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $Q(A) = 0 \iff L_{Q(A)} = 0$ ($\iff Q(L_A) = 0$). — app. multiplication à gauche)

Donc π_U, le polynôme minimal de U, est scindé, $Sp(U) = Sp(C_P) = Z(P)$.

De même, π_V est scindé sur $\mathbb{K}$, et $Sp(V) = Z(P)$.

Autrement : il existe $\varphi : [\![1, m^2]\!] \to [\![1, m]\!]$ tq

$$Sp(U) = (\gamma_{\varphi(1)}, \dots, \gamma_{\varphi(m^2)}).$$

il existe $\psi : [\![1, m^2]\!] \to [\![1, m]\!]$ tq

$$Sp(V) = (\gamma_{\psi(1)}, \dots, \gamma_{\psi(m^2)}).$$

Les polynômes minimaux de U et V sont scindés sur $\mathbb{K}$ et U et V commutent. Par le lemme, quitte à réordonner les $\varphi(i)$ et les $\psi(i)$, on peut supposer que pour tout $r \in \mathbb{R}$

$$Sp(U + V + r(U \circ V)) = \left(\gamma_{\varphi(i)} + \gamma_{\psi(i)} + r\,\gamma_{\varphi(i)}\gamma_{\psi(i)}\right)_{1 \le i \le m^2}.$$

Or $U + V + r(U \circ V)$ stabilise $S_m(\mathbb{R})$. Or, si $m = 2^{m+1} q$, q impair,

$$\dim S_m(\mathbb{R}) = \frac{1}{2} m(m+1) = \frac{1}{2} 2^{m+1} q\,(2^{m+1} q + 1)$$
$$= 2^m \underbrace{q\,(2^{m+1} q + 1)}_{\text{impair}}, \text{ donc}$$

$$v_2(\dim S_m(\mathbb{R})) = m.$$

Ainsi le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par $U+V+\lambda(U\circ V)$ sur $S_n(\mathbb{R})$ est donc un polynôme réel de degré $\dim(S_n(\mathbb{R}))$.

Par récurrence, il possède une racine complexe. On la note $\chi_\lambda \in \mathbb{C}$.

Pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, cette racine est de la forme

$\chi_\lambda = \Gamma\gamma_{\varphi(k)} + \Gamma\gamma_{\psi(k)} + \lambda\,\Gamma\gamma_{\varphi(k)}\,\Gamma\gamma_{\psi(k)}$, pour $k \in [\![1, n^2]\!]$

(le pol. car. de l'end. induit divise le pol. car. global)

Il y a une infinité de réels λ possibles et un nombre fini de k, donc il existe nécessairement $\lambda \neq \lambda'$ pour le même k.

On obtient alors :

- $\Sigma := \Gamma\gamma_{\varphi(k)} + \Gamma\gamma_{\psi(k)} = \dfrac{\lambda'\chi_\lambda - \lambda\chi_{\lambda'}}{\lambda' - \lambda} \in \mathbb{C}$

car $\lambda'\chi_\lambda - \lambda\chi_{\lambda'} = \lambda(\Gamma\gamma_{\varphi(k)} + \Gamma\gamma_{\psi(k)}) + \lambda'\lambda\,\Gamma\gamma_{\varphi(k)}\Gamma\gamma_{\psi(k)}$
$- \lambda(\Gamma\gamma_{\varphi(k)} + \Gamma\gamma_{\varphi(k)}) - \lambda'\lambda\,\Gamma\gamma_{\varphi(k)}\Gamma\gamma_{\psi(k)}$
$= (\lambda' - \lambda)(\Gamma\gamma_{\varphi(k)} + \Gamma\gamma_{\psi(k)})$.

et

- $\Pi := \Gamma\gamma_{\varphi(k)}\,\Gamma\gamma_{\psi(k)} = \dfrac{\chi_\lambda - \chi_{\lambda'}}{\lambda - \lambda'} \in \mathbb{C}$.

Donc $\Gamma\gamma_{\varphi(k)}$ et $\Gamma\gamma_{\psi(k)}$ sont racines de $X^2 - \Sigma X + \Pi \in \mathbb{C}[X]$

On est quadratiquement clos, donc $\Gamma\gamma_{\varphi(k)}, \Gamma\gamma_{\psi(k)} \in \mathbb{C}$.

En particulier, il possède une racine complexe.

~~Si K~~

Conclusion

Si $P \in \mathbb{C}[X]$, $d^\circ P \geq 1$.

alors $R := P\overline{P} \in \mathbb{R}[X]$ (car $\overline{R} = \overline{P\overline{P}} = \overline{P}\,\overline{\overline{P}}$
$= \overline{P}\,P$
$= R$).

Donc R possède une racine complexe z : $R(z) = 0$.

Ainsi $P(z)$ ou $\overline{P(z)} = 0$. Or si $\overline{P(z)} = 0$, alors

$P(\overline{z}) = \overline{\overline{P}(z)} = \overline{0} = 0$.

Donc tout pol. de $\mathbb{C}$ non constant admet une racine.

$\square$

- $\mathbb{C}$ est quadratiquement clos. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$.

(Si $a \neq 0$). $P = \frac{1}{a}\left(X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a}\right)$

$= \frac{1}{a}\left[\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$. où δ

donc $P = 0 \Leftrightarrow \left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

tout él^t admet 2 racines dans $\mathbb{C}$

$\Leftrightarrow \left(X + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$

$\Leftrightarrow X = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$. si $\Delta = b^2 - 4a$

- end. multiplicat° gauche / droite : ex. 1.13.19 CVA. / le mettre en exemple dans le plan

- ne pas faire le 1er lemme

Co-diagonalisation, co-trigonalisation.

Thm Une famille finie $(f_k)_{k\in[\![1,N]\!]}$ d'end. trigonalisables t.q. $\forall i,j$, f_i et f_j commutent, est co-trigonalisable

Preuve $N=2$

Récurrence pour $n=\dim E$

- $n=1$: OK
- $n\geq 1$: Soient $A, B \in \mathcal{T}_{n+1}(K)$ deux matrices trigonalisables.

Soit $\lambda \in Sp(B)$, existe car B trigonalisable.

$\ker(B-\lambda I_{n+1})$ est stable par A, car $AB=BA$, et l'end. induit par A y admet une vecteur propre.

On construit une base construite en complétant ce vecteur propre commun à A et B.

alors A et B sont semblables à $\begin{pmatrix} \mu & * \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix}$. $AB=BA \Rightarrow \tilde{A}\tilde{B}=\tilde{B}\tilde{A}$.

Par HR, il existe $P \in GL_n(K)$ t.q. $P\tilde{A}P^{-1}$ et $P\tilde{B}P^{-1}$ triangulaires

En considérant $\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & P \end{array}\right) \in \mathcal{T}_{n+1}(K)$, A et B simultanément trigo.

□

Pour la co-diagonalisation, on a une équivalence.